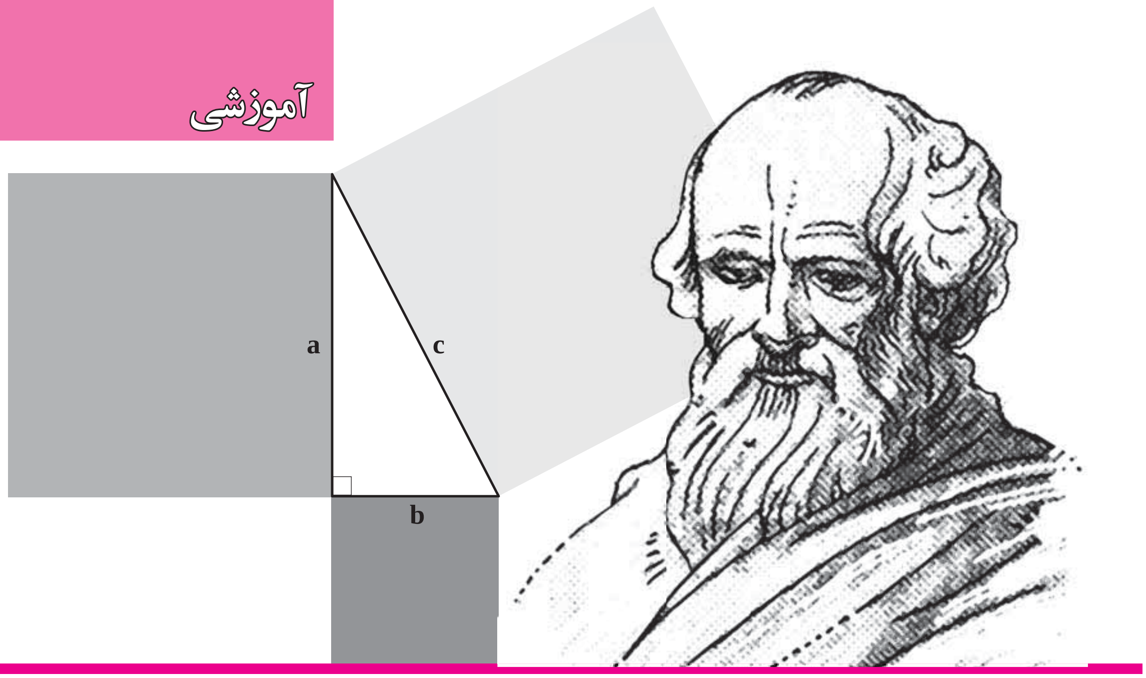



# میراث قضیهٔ فیثاغورس

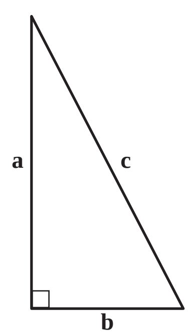

**حسن طبیعی**
دبیر ریاضی
شهر قدس


**اشاره**

**مقالهٔ ارائه شده ترجمهٔ مقالهٔ «THE LEGACY OF PYTHAGORAS THEOREM» از مجلهٔ «parabola» است. این مجلهٔ استرالیایی کار خود را با هدف آموزش نوین ریاضی و ترویج و غنی‌سازی ریاضیات از سال ۱۹۶۴ آغاز کرده و تاکنون تعداد زیادی از دانش‌آموزان سراسر جهان را جذب کرده است. همچنین این مجله مورد حمایت «دانشگاه نیوساوت ولز»[1] (UNSW) است. نویسندهٔ این مقاله، پیتر جف براون[2]، استاد دانشگاه نیوساوت ولز است. وی تحقیقاتی در زمینه‌های نظریهٔ اعداد و تاریخ ریاضیات انجام داده و این مقاله را نیز پیرامون قضیهٔ فیثاغورس و بررسی تعمیم‌های آن به‌صورت ساده و قابل فهم نوشته است.**

**جالب اینکه در این مقاله از یک ریاضی‌دان مسلمان به‌نام «ثابت‌بن قره» نیز سخن به میان آمده و قضیه‌ای را با نام «قانون ثابت» مطرح کرده است.**

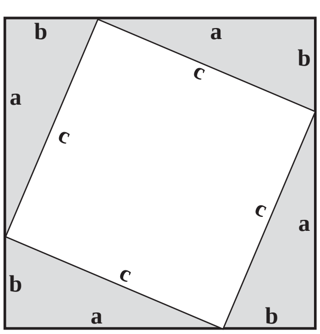
زمانی که از افراد یک جامعه پرسیده شود: «کدام قضیهٔ ریاضی را از دوران دبیرستان به‌خاطر دارید»، احتمالاً میانگین آنان پاسخ خواهند داد: «قضیهٔ فیثاغورس.»[3]




در هر مثلث قائم‌الزاویه مجموع مربع‌های دو ضلع کوچک‌تر برابر است با مربع وتر.

$c^2=a^2+b^2$

در واقع قضیهٔ فیثاغورس نه‌تنها به سادگی در ذهن جای می‌گیرد، بلکه قضیه‌ای قابل پیش‌بینی است. هیچ دلیل استقرایی برای اینکه چنین رابطهٔ ساده‌ای بین اضلاع مثلث قائم‌الزاویه برقرار است، چرا این رابطه باید بر حسب مربع‌های اضلاع باشد، و چرا مکعب و یا توان‌های دیگر اضلاع نباشد، وجود ندارد. اثبات‌های زیادی برای قضیهٔ فیثاغورس ارائه شده‌اند، اما می‌خواهیم یکی از ساده‌ترین آن‌ها را یادآوری کنیم.



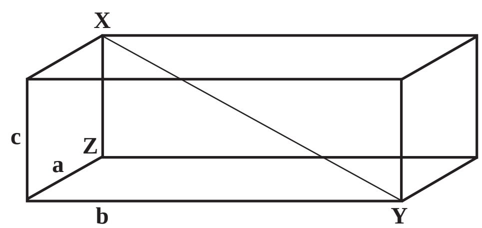

ما می‌توانیم چهار مثلث را به‌گونه‌ای روی محیط مربعی به ضلع c مرتب کنیم

که مربعی بزرگ‌تر به ضلع a+b درست شود.

حال مساحت مربع بزرگ‌تر را به دو طریق محاسبه می‌کنیم:

$$(a+b)^2 = c^2 + 4\times\frac{1}{2}ab \Rightarrow c^2 = a^2+b^2$$

قضیهٔ فیثاغورس تعمیم‌هایی نیز دارد. شما می‌توانید قضیهٔ فیثاغورس را به‌عنوان یک فرمول برای محاسبهٔ طول قطر یک مستطیل به اضلاع a و b تعبیر کنید. حال اگر بخواهیم این موضوع را در فضای سه‌بعدی بررسی کنیم، طبیعی است که باید به‌دنبال راهی برای یافتن طول قطر یک مکعب مستطیل با اضلاع a، b و c باشیم.

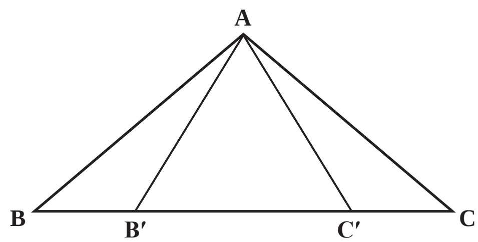



روشن است که طول YZ برابر است با: $\sqrt{a^2+b^2}$ و $YZ^2+c^2=XY^2$. در نتیجه: $XY=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ و به این ترتیب طول قطر مکعب مستطیل حاصل می‌شود. با این ایدهٔ ساده می‌توانیم این قضیه را به ابعاد بالاتری تعمیم دهیم.

تعمیم‌های جبری از $a^2+b^2=c^2$ به $a^n+b^n=c^n$ برای $n\geq 3$ و a، b و c صحیح و مثبت، به ایجاد مسئله‌ای مشهور به نام «قضیهٔ آخر فرما»[4] منجر شده است که در مورد آن مقالات بسیاری نوشته شده‌اند. موضوع این مقاله برخی تعمیم‌های هندسی قضیهٔ فیثاغورس است که شاید به اندازهٔ آن مشهور نباشند.

اولین تعمیم برای این قضیه به قرن ۹ میلادی برمی‌گردد و با نام «قانون ثابت» شناخته شده است. **ثابت بن‌قره**[5] در ترکیه کنونی به دنیا آمده و در سال ۸۷۰ میلادی به بغداد رفته است. او که کتاب‌های زیادی در زمینهٔ جبر مقدماتی و هندسه نوشته این نتیجه را در یکی از کتاب‌هایش آورده است: «مثلث ABC با زاویهٔ منفرجه A را در نظر بگیرید. خطوط AC´ و AB´ را از رأس A رسم می‌کنیم تا BC را در B´ و C´ قطع کنند؛ به‌طوری که زاویه‌های AB´B و AC´C برابر با زاویهٔ BAC باشند. آن‌گاه:

$AB^2+AC^2=BC(BB'+CC')$



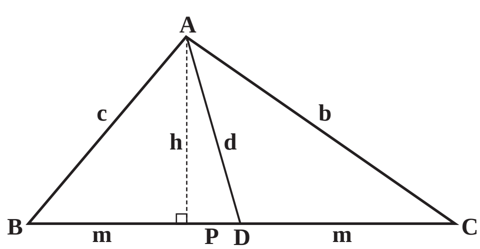

برای اثبات این حکم باید توجه داشت که مثلث ABC با مثلث‌های ACC´ و ABB´ متشابه است. بنابراین:

$$\frac{AC}{CC'}=\frac{BC}{AC}\ ,\ \frac{AB}{BB'}=\frac{BC}{AB}$$

با طرفین ـ وسطین‌کردن این دو کسر و جمع نتایج به‌دست آمده حکم اثبات می‌شود. این تعمیمی از قضیهٔ فیثاغورس است. چون که اگر $A=90^\circ$، آن‌گاه B´ و C´ برهم منطبق می‌شوند و فرمول فیثاغورس حاصل می‌شود.

تعمیم دیگر برمی‌گردد به هندسه‌دان یونان باستان، **آپولونیوس**[6]؛ کسی که اولین رساله در زمینهٔ مقاطع مخروطی را نوشت. قضیهٔ آپولونیوس بیان می‌کند که:

در مثلث ABC، اگر D وسط BC باشد و AD=d و BD=DC=m، آن‌گاه: $c^2+b^2=2(d^2+m^2)$




یعنی بیان می‌کند که: در هر مثلث، جمع مربع‌های دو ضلع برابر است با دو برابر مربع نصف ضلع سوم به‌علاوه دو برابر مربع میانه. برای اثبات این قضیه از A بر BC عمود کنید. آن‌گاه با توجه به قضیهٔ فیثاغورس $b^2=h^2+(m+p)^2$ و $c^2=h^2+(m-p)^2$

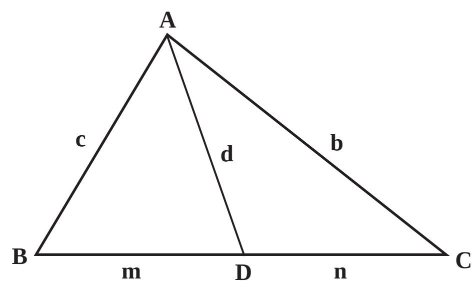
با جمع کردن دو تساوی بالا داریم:

$2m^2+2(h^2+p^2)=c^2+b^2$. اما $h^2+p^2=d^2$ و در نتیجه قضیه اثبات می‌شود. اگر A یک زاویهٔ قائمه شود، آن‌گاه $d=m=\frac{BC}{2}$ و این دوباره فرمول فیثاغورس را نتیجه می‌دهد.

«قضیهٔ استوارت» نیز تعمیمی از قضیهٔ آپولونیوس است که یک کاربرد از قانون کسینوس‌ها را نمایش می‌دهد. **متیو استوارت**[6] این نتیجه را در سال ۱۷۴۵ انتشار داد:

در مثلث ABC فرض کنید AD ضلع BC را به نسبت $\frac{m}{n}$ تقسیم کند (به‌طوری که داشته باشیم: $m+n=a$) و $AD=d$. آن‌گاه $c^2n+b^2m=a(d^2+mn)$.

توجه کنید، اگر $m=n$ آن‌گاه قضیهٔ آپولونیوس به‌دست می‌آید.




می‌توان یک اثبات هندسی مانند استدلالی که در اثبات قضیهٔ آپولونیوس به‌کار برده شد، ارائه کرد. راه آسان‌تر استفاده از قانون کسینوس‌هاست. داریم:

$$c^2=d^2+m^2-2dm\cos A\hat{D}B$$
$$b^2=d^2+n^2-2dn\cos A\hat{D}C$$
$$=d^2+n^2+2dn\cos A\hat{D}B$$

(توجه کنید: $\cos(180-\theta)=-\cos\theta$) بنابراین:

$$nc^2+mb^2=d^2(m+n)+mn(m+n)=a(d^2+mn)$$

همچنین به‌عنوان تمرین با استفاده از قضیهٔ استوارت نشان دهید:

اگر خط DA در شکل بالا زاویهٔ A را نصف کند، آن‌گاه:

$$AD^2=bc-mn$$

این نتایج تنها نمونه‌های کوچکی از راه‌های بسیاری هستند که در آن‌ها قضیهٔ معروف فیثاغورس در طول دو و نیم هزار سال یا بیشتر تعمیم داده شده‌اند.

*** پی‌نوشت**

1. University of New South Wales
2. Peter G. Brown
3. Pythagoras theorem
4. Fermat's last theroem
5. Thabit ibn Qurra
6. Apollonius
7. Matthew Stewart


# پرسش‌های پیکارجو!


چند سری اعداد صحیح a، b، c و d یافت می‌شوند که داشته باشیم:

$ab+cd=ac+bd=ad+bc=-1$؟

الف) ۲ ب) ۴ ج) ۶

د) ۸ هـ) ۱۰